QUADERNI

Università degli Studi di Siena
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA POLITICA

CLAUDIO PACATI

Strutture per scadenza dei tassi lordi e strutture per scadenza dei tassi netti

n. 309 - Novembre 2000

Sommario

Assegnata la struttura per scadenza dei tassi di interesse di mercato *lordi*, si studia come ricostruire da essa la struttura per scadenza dei tassi di interesse *netti*, secondo le regole di tassazione in vigore in Italia per le principali tipologie di contratti obbligazionari. Se ne deduce una metodologia per "nettare" i parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross univariato, stimati sui dati di un mercato che, come quello europeo, ragiona in senso "lordista".

Parole e frasi chiave: struttura per scadenza dei tassi di interesse; effetti fiscali; modello di Cox, Ingersoll e Ross.

classificazione JEL: E43; H21.

classificazione MSC2000: 91B28.

Abstract

We study how to extract from a given market *pre-tax* term structure of interest rates the information of the *after-tax* term structure, according to Italian taxation rules for the mostly traded bond-market contracts. We deduce a methodology to "net" the parameters of the one-factor Cox, Ingersoll, and Ross model, estimated on european pre-tax market-data.

Keywords and phrases: term structure of interest rates; taxation effects; Cox, Ingersoll, and Ross model.

JEL classification: E43; H21.

MSC2000 classification: 91B28.

1 Introduzione

A partire dal 1 gennaio 1997 si è avuta in Italia una riforma del meccanismo di tassazione dei titoli obbligazionari, che ha mutato radicalmente il contenuto informativo delle quotazioni di mercato. Prima di tale data, infatti, tutti gli agenti erano *nettisti* e soggetti allo stesso meccanismo di tassazione dei rendimenti obbligazionari, che prevedeva la ritenuta fiscale sugli interessi (cedole e scarto di emissione) ad un'aliquota costante e uguale per tutti e che, per i titoli di Stato italiani, veniva applicata alla fonte. Le quotazioni espresse dagli operatori contenevano questa informazione e pertanto si poteva estrarre da esse l'informazione sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse *netti*, con tecniche illustrate, ad esempio, in [4], [2], [5] e [6]. A partire dal 1 gennaio 1997 gli operatori istituzionali sono diventati per lo più *lordisti*, ovvero non più soggetti alla ritenuta fiscale sugli interessi.[1] I prezzi dei mercati finanziari italiani hanno pertanto perso il contenuto informativo relativo agli effetti fiscali[2] e questo fenomeno si è rafforzato dopo l'introduzione dell'euro, che ha omogeneizzato i vari mercati finanziari dei paesi aderenti. La struttura per scadenza dei tassi di interesse che si può ricavare oggi dai dati di mercato è pertanto di tipo *lordo*. Sorge quindi il problema di individuare in qualche modo la struttura dei rendimenti netti, da utilizzare nelle valutazoni reletive a soggetti *nettisti*. Il problema non è trascurabile perché tra questi ultimi vi sono i gestori di fondi o comunque di risparmio gestito.

Il lavoro si articola in due fasi. Nella sezione 2 si studiano e si confrontano i meccanismi di "netting" della struttura indotti dalle varie forme di tassazione in vigore in Italia per le principali tipologie di titoli obbligazionari. Nella sezione 3 si applicano i risultati della sezione 2 per determinare una regola di netting dei parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross [3], che è il modello stocastico più utilizzato in Italia per l'analisi del mercato obbligazionario.

Nel lavoro utilizzeremo le notazioni e le convenzioni di [4] e [2]. In particolare, fissati gli istanti temporali $t \leq s$, le grandezze $v(t,s)$, $m(t,s)$, $\delta(t,s)$, $i(t,s)$ indicheranno, ri-

[1] I rimanenti agenti, i *nettisti*, hanno mantenuto il regime di tassazione preesistente, con alcune modifiche, la principale delle quali è stata l'introduzione della tassazione del *capitale gain* secondo la stessa regola prevista per gli interessi. In particolare, a differenza di altri paesi europei, l'aliquota fiscale è la stessa per tutti i nettisti, prescindendo dall'aliquota marginale dell'imposta sulle persone fisiche, ed è attualmente fissata al 12.5%.

[2] Tranne che per alcuni casi di *clientela fiscale* che si è manifestata per alcuni titoli di Stato italiani in alcuni periodi

spettivamente, il fattore di sconto, il fattore montante, l'intensità istantanea di interesse (*forward rate*) in base annua ed il tasso di interesse a pronti in base annua in vigore sul mercato al tempo t e relativi alla scadenza s, nella loro versione lorda (*pre-tax*); il tasso locale di interesse (*spot rate*) lordo in vigore al tempo al tempo t sarà indicato con $r(t)$. Pertanto, in base a queste notazioni e assumendo senza restrizione che il fattore di sconto sia di classe C^1 rispetto alla seconda variabile temporale, valgono le seguenti relazioni fra le varie grandezze:

$$m(t,s) = \frac{1}{v(t,s)} \quad , \quad \delta(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log v(t,s) \quad , \quad i(t,s) = m(t,s)^{\frac{1}{s-t}} - 1 \quad , \quad r(t) = \delta(t,t) \quad .$$

Le corrispondenti grandezze nette (*after-tax*) saranno indicate rispettivamente con $v_{\mathrm{n}}(t,s)$, $m_{\mathrm{n}}(t,s)$, $\delta_{\mathrm{n}}(t,s)$, $i_{\mathrm{n}}(t,s)$ e $r_{\mathrm{n}}(t)$.

2 Un'analisi statica delle varie forme di tassazione

Si consideri assegnata al tempo t la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore sul mercato, così come percepita da un investitore *lordista*. Volendo ricavare da questa la struttura per scadenza percepita da un investitore nettista, bisogna anzitutto distinguere fra i vari tipi di tassazione. Nelle sottosezioni 2.1 e 2.2 discuteremo le due forme di tassazione applicate ai titoli a cedola nulla (*zero coupon bond – zcb*), mentre nella sezione 2.3 discuteremo la forma di tassazione applicata ai titoli con cedole. In tutti i casi, nella determinazione delle grandezze finanziare, assumeremo che i titoli, una volta acquistati, vengano detenuti fino a scadenza; trascureremo pertanto l'effetto della tassazione del *capital gain*, così come, nel caso di acquisto sul mercato secondario, del cosiddetto "equalizzatore fiscale" di recente introduzione.

Gli esempi numerici di questa sezione saranno costruiti a partire dalla struttura per scadenza dei tassi di interesse lorda stimata per mezzo del modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) [3] univariato sui dati del mercato dei tassi di *interest rate swap* euro di tipo fisso a 1 anno contro variabile a sei mesi. Per maggiori dettagli sulla procedura di stima si veda [7]. Ai fini di questa sezione l'uso del modello CIR si riduce all'uso della sola forma funzionale del fattore di sconto prevista dal modello.

2.1 La tassazione zcb anticipata

Il meccanismo di tassazione applicato in Italia ai titoli a cedola nulla di durata nominale fino ad un anno prevede la tassazione dell'interesse ad un'aliquota a, da pagarsi all'atto dell'acquisto ed è pertento percepita da un investitore nettista come un aumento del prezzo. Chiameremo questo meccanismo la *tassazione zcb anticipata*. Nella prima sotto-sezione considereremo il caso di acquisto all'emissione (mercato primario), mentre nella seconda ci occuperemo del caso di acquisto sul mercato secondario.

2.1.1 La tassazione sul mercato primario

Se si considera, alla data t di emissione, uno zcb unitario che scade al tempo s, la ritenuta fiscale è $[1 - v(t,s)]a$ e pertanto

$$v_{\mathrm{n}}(t,s) = v(t,s) + [1 - v(t,s)]a = v(t,s)(1-a) + a \ . \tag{1}$$

Il fattore montante netto risulta

$$m_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{1}{v_{\mathrm{n}}(t,s)} = \frac{1}{v(t,s)(1-a)+a} = \frac{1}{\frac{1-a}{m(t,s)} + a} = \frac{m(t,s)}{(1-a) + am(t,s)} \ , \tag{2}$$

mentre l'intensità istantanea di interesse netta è

$$\delta_{\mathrm{n}}(t,s) = -\frac{1}{v_{\mathrm{n}}(t,s)} \frac{\partial}{\partial s} v_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{(1-a)v(t,s)}{v(t,s)(1-a)+a} \delta(t,s) \tag{3}$$

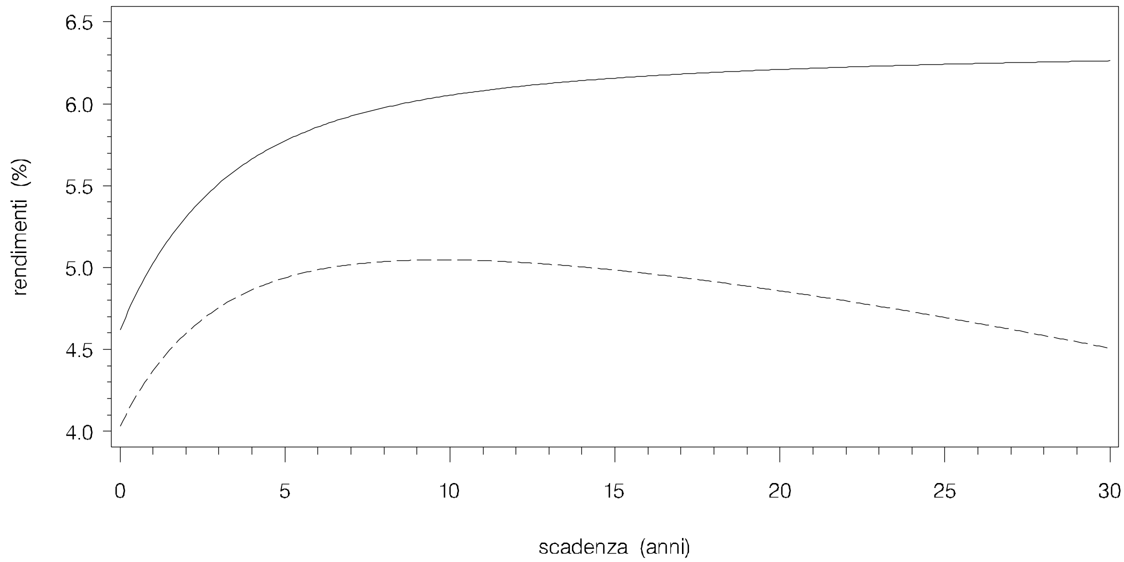
che, scritta utilizzando il fattore montante, risulta

$$\delta_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{1-a}{(1-a)+am(t,s)} \delta(t,s) \ . \tag{4}$$

Il tasso locale di interesse netto risulta

$$r_{\mathrm{n}}(t) = \delta_{\mathrm{n}}(t,t) = (1-a)\delta(t,t) = (1-a)r(t) \ . \tag{5}$$

Nella figura 1 a pagina 4 sono riportate la struttura per scadenza dei tassi lordi (linea continua) e netti (linea tratteggiata) in vigore sul mercato alla data del 18/5/2000. La struttura dei tassi netti è stata ottenuta da quella dei tassi lordi nell'ipotesi di tassazione zcb anticipata con aliquota $a = 12.5\%$. Si nota chiaramente il forte effetto indotto dalla tassazione per le scadenze lunghe: questo è il motivo per cui questa forma di tassazione viene imposta solo per gli zcb con scadenze inferiori all'anno.



$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\rm n}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\rm n}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\rm n}(t,s)$
1	5.023812	4.368403	11	6.080590	5.042183	21	6.217506	4.827648
2	5.308977	4.598821	12	6.104338	5.032954	22	6.224389	4.796184
3	5.513316	4.756321	13	6.124539	5.019852	23	6.230675	4.763512
4	5.662697	4.864136	14	6.141911	5.003506	24	6.236437	4.729718
5	5.774111	4.937492	15	6.156999	4.984395	25	6.241738	4.694880
6	5.858865	4.986500	16	6.170218	4.962884	26	6.246632	4.659071
7	5.924592	5.017958	17	6.181893	4.939261	27	6.251164	4.622356
8	5.976512	5.036501	18	6.192276	4.913756	28	6.255372	4.584798
9	6.018242	5.045331	19	6.201569	4.886554	29	6.259290	4.546460
10	6.052330	5.046693	20	6.209935	4.857809	30	6.262947	4.507399

Figura 1: Strutture per scadenza dei tassi di interesse lordi e netti (tassazione zcb anticipata) al 18/5/2000

2.1.2 La tassazione sul mercato secondario

Se si considera, alla data t, uno zcb unitario emesso in $t_0 \le t$ e che scade al tempo s, la ritenuta fiscale applicata per l'acquisto in t è calcolata a partire dalla ritenuta all'emissione in proporzione alla vita residua ed è $[1 - v(t_0, s)]a\frac{s-t}{s-t_0}$. Pertanto la grandezze analoghe a quelle della sottosezione precedente dipendono dalla data di emissione t_0. Per quanto riguarda il fattore di sconto netto si ottiene

$$v_{\rm n}^{(t_0)}(t,s) = v(t,s) + [1 - v(t_0,s)]a\frac{s-t}{s-t_0} \quad . \tag{6}$$

Il fattore montante netto risulta

$$m_{\rm n}^{(t_0)}(t,s) = \frac{1}{v_{\rm n}^{(t_0)}(t,s)} = \frac{m(t,s)m(t_0,s)}{m(t_0,s) + [m(t_0,s)-1]a\frac{s-t}{s-t_0}m(t,s)} \quad , \tag{7}$$

mentre l'intensità istantanea di interesse netta è

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s) &= -\frac{1}{v_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s)}\frac{\partial}{\partial s}v_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s) \\ &= \frac{\delta(t,s)v(t,s) - a\left[[1-v(t_0,s)]\frac{t-t_0}{(s-t_0)^2} + \delta(t_0,s)v(t_0,s)\frac{s-t}{s-t_0}\right]}{v(t,s)+[1-v(t_0,s)]a\frac{s-t}{s-t_0}} \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Il tasso locale di interesse netto risulta quindi

$$r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = \delta_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,t) = r(t) - [1-v(t_0,t)]\frac{a}{t-t_0} \quad ; \tag{9}$$

come caso limite, per $t \to t_0^+$, si ottiene ovviamente

$$r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t_0) = \lim_{t\to t_0^+} r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = (1-a)r(t_0) \quad ,$$

che coincide con la (5) a pagina 3.

I risultati di questo caso mostrano come la dipendenza dalla data di emissione t_0 distorca in modo non trascurabile le grandezze finanziarie nette, rispetto a quelle ottenute nella sottosezione precedente. In particolare, confrontando la (5) a pagina 3 con la (9), si ha che la differenza tra i tassi locali è

$$r_{\mathrm{n}}^{(t)}(t) - r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = a\left[\frac{1-v(t_0,t)}{t-t_0} - r(t)\right]$$

e si annulla solo nel caso di $v(t_0,t) = 1 - r(t)(t-t_0)$. Tuttavia, se $t-t_0$ è piccolo, si può scrivere la formula di Taylor del primo ordine

$$v(t_0,t) = 1 + \frac{\partial}{\partial t}v(t_0,t)|_{t=t_0}(t-t_0) + o(t-t_0) = 1 - r(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0) \quad ,$$

e misurare l'effetto della distorsione del tasso locale con

$$r_{\mathrm{n}}^{(t)}(t) - r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = a\left[r(t_0) - r(t)\right] + ao(1) \quad .$$

Pertanto, se non è passato troppo tempo dall'emissione e se le condizioni d mercato non sono cambiate di molto fra t_0 e t, l'effetto della distorsione sul tasso locale netto risulta trascurabile.

2.2 La tassazione zcb posticipata

Il meccanismo di tassazione applicato in Italia ai titoli a cedola nulla di durata nominale oltre l'anno prevede la tassazione dell'interesse ad un'aliquota a, da pagarsi alla scadenza del titolo, ed è pertento percepita da un investitore nettista come una diminuzione del rimborso del capitale nominale. Chiameremo questo meccanismo la *tassazione zcb posticipata*. Come nella sezione precedente distingueremo tra operazioni di acquisto sul mercato primario e secondario.

2.2.1 La tassazione sul mercato primario

Se si considera, al tempo t di emissione, uno zcb di prezzo unitario che scade al tempo s, la ritenuta fiscale è $[m(t,s)-1]a$ e pertanto

$$m_{\mathrm{n}}(t,s) = m(t,s) - [m(t,s)-1]a = m(t,s)(1-a) + a \tag{10}$$

e quindi il fattore di sconto netto è

$$v_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{1}{m_{\mathrm{n}}(t,s)} = \frac{v(t,s)}{(1-a)+av(t,s)} \quad . \tag{11}$$

L'intensità istantanea di interesse netta è

$$\delta_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{1}{m_{\mathrm{n}}(t,s)}\frac{\partial}{\partial s}m_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{(1-a)m(t,s)}{m(t,s)(1-a)+a}\delta(t,s) \tag{12}$$

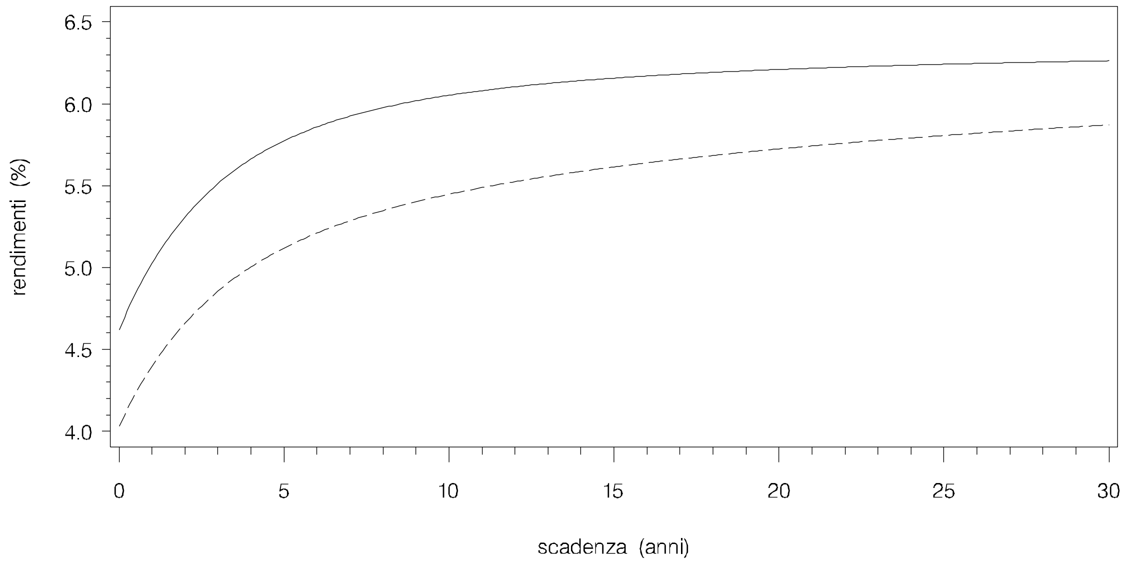
che, scritta utilizzando il fattore di sconto, diventa

$$\delta_{\mathrm{n}}(t,s) = \frac{1-a}{(1-a)+av(t,s)}\delta(t,s) \quad . \tag{13}$$

Il tasso locale di interesse netto risulta

$$r_{\mathrm{n}}(t) = \delta_{\mathrm{n}}(t,t) = (1-a)\delta(t,t) = (1-a)r(t) \quad . \tag{14}$$

Nella figura 2 a pagina 7 sono riportate la struttura per scadenza dei tassi lordi (linea continua) e netti (linea tratteggiata) in vigore sul mercato alla data del 18/5/2000. La struttura dei tassi netti è stata ottenuta da quella dei tassi lordi nell'ipotesi di tassazione zcb posticipata con aliquota $a = 12.5\%$. Confrontando la figura 1 a pagina 4 con la figura 2, si evidenzia come le due strutture nette siano molto simili per scadenze fino ad un'anno, per poi differire notevolmente; nella figura 2 non si evidenzia infatti la distorsione per scadenze lunghe notata nella figura 1. Si può pertanto concludere che, per le scadenze rilevanti ai fini della tassazione zcb anticipata, i due meccanismi di tassazione producono strutture dei rendimenti che differiscono di poco, mentre per scadenze oltre l'anno la tassazione zcb posticipata produce tassi netti più "ragionevoli" di quella zcb anticipata.



$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$
1	5.023812	4.395836	11	6.080590	5.488621	21	6.217506	5.742773
2	5.308977	4.660084	12	6.104338	5.524820	22	6.224389	5.760008
3	5.513316	4.855441	13	6.124539	5.557449	23	6.230675	5.776363
4	5.662697	5.003615	14	6.141911	5.587145	24	6.236437	5.791916
5	5.774111	5.118895	15	6.156999	5.614392	25	6.241738	5.806731
6	5.858865	5.210829	16	6.170218	5.639564	26	6.246632	5.820868
7	5.924592	5.285888	17	6.181893	5.662955	27	6.251164	5.834376
8	5.976512	5.348522	18	6.192276	5.684799	28	6.255372	5.847300
9	6.018242	5.401831	19	6.201569	5.705285	29	6.259290	5.859679
10	6.052330	5.448006	20	6.209935	5.724567	30	6.262947	5.871550

Figura 2: Strutture per scadenza dei tassi di interesse lordi e netti (tassazione zcb posticipata) al 18/5/2000

2.2.2 La tassazione sul mercato secondario

Se si considera, alla data t, uno zcb unitario emesso in $t_0 \leq t$ e che scade al tempo s, la ritenuta fiscale da pagarsi a scadenza in caso di acquisto in t è la stessa prevista per l'acquisto all'emissione, ovvero $[1-v(t_0,s)]a$; è tuttavia previsto un conguaglio all'acquirente sul secondario, proporzionale al tempo trascorso dall'emissione, che viene pagato sotto forma di sconto sul prezzo di acquisto. Pertanto, il prezzo di acquisto per un investitore nettista è

$$v(t,s) - a\frac{t-t_0}{s-t_0}[1-v(t_0,s)]$$

ed il rimborso a scadenza risulta

$$1-[1-v(t_0,s)]a = (1-a) + av(t_0,s) \ .$$

Anche in questo caso le gradezze finanziarie nette risultano dipendenti dalla data t_0 di emissione. Il fattore di sconto netto dell'operazione è infatti

$$v_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s) = \frac{v(t,s) - a\frac{t-t_0}{s-t_0}[1 - v(t_0,s)]}{(1-a) + av(t_0,s)} \tag{15}$$

e il montante netto dell'operazione, con semplici passaggi, risulta

$$m_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s) = \frac{[(1-a)m(t_0,s) + a]m(t,s)}{m(t_0,s) - a\frac{t-t_0}{s-t_0}[m(t_0,s) - 1]m(t,s)} \ . \tag{16}$$

l'intensità istantanea di interesse netto risulta

$$\delta_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t,s) = \frac{\delta(t,s)v(t,s) - a\left[[1 - v(t_0,s)]\frac{t-t_0}{(s-t_0)^2} + \delta(t_0,s)v(t_0,s)\frac{t-t_0}{s-t_0}\right]}{v(t,s) - a\frac{t-t_0}{s-t_0}[1 - v(t_0,s)]} - a\frac{\delta(t,s)v(t,s)}{(1-a) + av(t_0,s)} \tag{17}$$

e che pertanto, con semplici passaggi, si ottiene che il tasso locale di interesse netto vale

$$r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = \frac{r(t) - [1 - v(t_0,t)]\frac{a}{t-t_0}}{(1-a) + av(t_0,t)} \ . \tag{18}$$

Anche in questo caso, nel caso limite di $t \to t_0^+$, si ha che

$$r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} r_{\mathrm{n}}^{(t_0)}(t) = (1-a)r(t_0) \ ,$$

che coincide con la (14) a pagina 6.

Come per il caso della tassazione zcb anticipata, se $t - t_0$ è piccolo e se non si sono avuti eccessivi mutamenti delle condizioni di mercato fra t e t_0, ripetendo ragionamenti simili a quelli della sottosezione 2.1.2, si vede che la distorsione indotta sul tasso locale netto dai diversi meccanismi di tassazione tra mercato primario e secondario è trascurabile.

2.3 La tassazione tcf

Il meccanismo di tassazione applicato in Italia ai titoli con cedole prevede la tassazione dell'interesse periodico ad un'aliquota a, da pagarsi posticipatamente (alla scadenza del periodo), ed è pertanto percepita da un investitore nettista come una diminuzione della cedola[3]. Ci limiteremo a considerare il caso di titoli a cedola fissa e chiameremo questo meccanismo la *tassazione tcf*.

[3] I titoli con cedole prevedono anche la tassazione dello scarto fra il prezzo di emissione ed il nominale, da pagarsi alla scadenza del titolo come diminuzione del rimborso del nominale; per semplicità trascureremo questo effetto, limitandoci al caso di acquisti alla pari. Naturalmente questa semplificazione risulta ininfluente si considera il caso di un titolo a cedola fissa con tasso cedolare coincidente con il *par yield*.

Se si considera un tcf di nominale unitario, che paga m cedole con periodicità cedolare τ anni, scadenza $s = t + m\tau$, tasso cedolare $j_{m,\tau}$ (in base periodale) e quotato alla pari, allora il tasso cedolare lordo coincide con il *par yield* lordo espresso su base periodale, ovvero

$$j_{m,\tau} = \frac{1 - v(t,s)}{\sum_{k=1}^{m} v(t, t + k\tau)} \quad .$$

Si ricordi che questo *par yield* è uguale al tasso *interest rate swap* con periodicità del fisso pari a τ. L'equazione che definisce la struttura dei fattori di sconto netti è pertanto, per ogni scadenza s del tipo $s = t + m\tau$ con m intero positivo,

$$1 = \sum_{k=1}^{m} (1 - a) j_{m,\tau} v_{\mathrm{n}}(t, t + k\tau) + v_{\mathrm{n}}(t, s) \quad , \tag{19}$$

da cui si ricava

$$v_{\mathrm{n}}(t, s) = \frac{1 - (1 - a) j_{m,\tau} \sum_{k=1}^{m-1} v_{\mathrm{n}}(t, t + k\tau)}{1 + (1 - a) j_{m,\tau}} \quad , \tag{20}$$

che è una relazione ricorrente tramite la quale, partendo dalla espressione iniziale ($m = 1$)

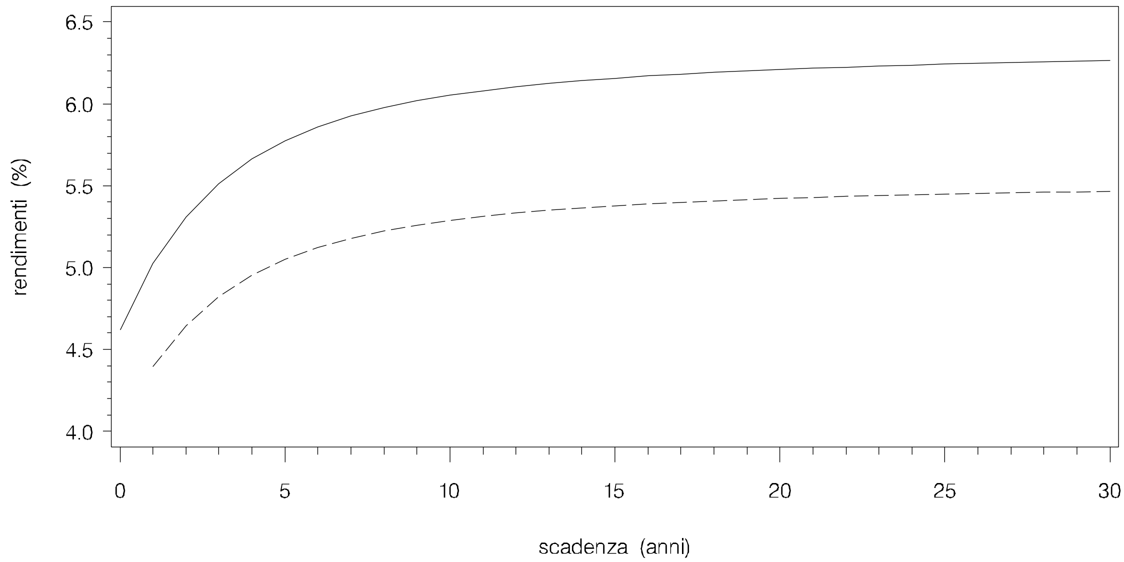
$$v_{\mathrm{n}}(t, t + \tau) = \frac{1}{1 + (1 - a) j_{1,\tau}} = \frac{v(t, t + \tau)}{(1 - a) + a v(t, t + \tau)} \quad , \tag{21}$$

si calcolano i fattori di sconto netti per le scadenze $t + k\tau$, con $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$.

Naturalmente la struttura per scadenza netta dipende dalla periodicità di cedola τ, che rappresenta la periodicità di tassazione ed è definita solo per scadenze del tipo $t + m\tau$ con m intero positivo. Nelle figure 3 a pagina 10 e 4 a pagina 11 sono riportate le strutture per scadenza dei tassi lordi (linee continue) in vigore sul mercato alla data del 18/5/2000 e le due strutture per scadenza dei tassi di interesse netti (linee tratteggiate) che ne derivano nell'ipotesi di tassazione tcf posticipata con aliquota $a = 12.5\%$ e periodicità rispettivamente $\tau = 1$ anno e $\tau = 1$ mese. Un confronto fra le due figure mostra come le due strutture nette differiscano di poco, pur riferendosi ai due casi "estremi" della periodicità di cedola τ.

Poiché la struttura per scadenza netta è definita solo su di uno scadenzario discreto, non si ha la versione netta né dell'intensità istantanea di interesse, né del tasso locale di interesse. Tuttavia, nel caso limite $\tau \to 0$, si ottiene la struttura netta definita sullo scadenzario continuo $[0, +\infty)$ e l'espressione del tasso locale di interesse netto che ne risulta è

$$r_{\mathrm{n}}(t) = (1 - a) r(t) \quad , \tag{22}$$



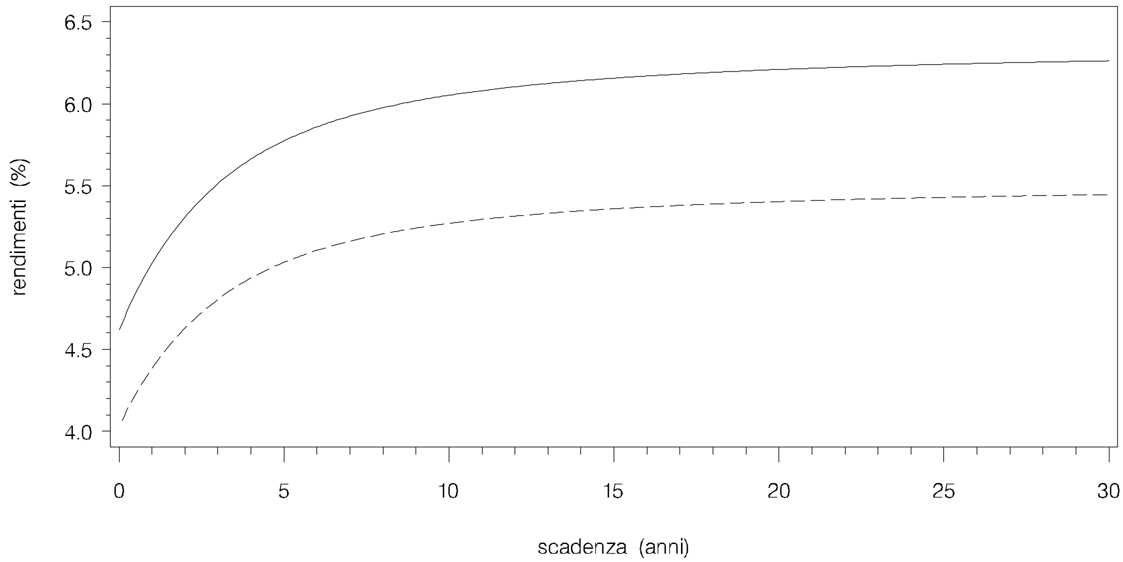
$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$
1	5.023812	4.395836	11	6.080590	5.312606	21	6.217506	5.428387
2	5.308977	4.644546	12	6.104338	5.332888	22	6.224389	5.434069
3	5.513316	4.822363	13	6.124539	5.350099	23	6.230675	5.439233
4	5.662697	4.952068	14	6.141911	5.364863	24	6.236437	5.443942
5	5.774111	5.048599	15	6.156999	5.377650	25	6.241738	5.448251
6	5.858865	5.121880	16	6.170218	5.388821	26	6.246632	5.452205
7	5.924592	5.178596	17	6.181893	5.398654	27	6.251164	5.455843
8	5.976512	5.223309	18	6.192276	5.407369	28	6.255372	5.459200
9	6.018242	5.259177	19	6.201569	5.415140	29	6.259290	5.462304
10	6.052330	5.288416	20	6.209935	5.422108	30	6.262947	5.465179

Figura 3: Strutture per scadenza dei tassi di interesse lordi e netti (tassazione tcf posticipata con $\tau = 1$ anno) al 18/5/2000

che coincide con quelle ottenute nel caso delle due forme di tassazione precedentemente considerate.

Un confronto delle figure 3 e 4 con le figure 1 a pagina 4 e 2 a pagina 7 evidenzia i differenti effetti dei meccanismi di tassazione. Bisogna tuttavia osservare che la struttura dei tassi netti prodotta dalla tassazione zcb anticipata ha senso solo per scadenze entro l'anno e che quella prodotta dalla tassazione zcb posticipata è poco significativa sul lungo termine, anche perchè su tali scadenze vi sono pochi titoli a cedola nulla quotati e, tra questi, nessun titolo di Stato italiano[4]. Pertanto, confrontando solo i tratti di curva significativi delle varie figure, si può concludere che i differenti meccanismi di tassazione inducono distorsioni di piccola entità sui tassi netti. Si può vedere che la conclusione

[4]Il tentativo, favorito dal Tesoro, di avviare un efficiente mercato secondario degli *strip* dei BTP, sul modello di quello americano, non pare avere dato fin'ora risultati soddisfacenti.



$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$
1	5.023812	4.383099	11	6.080590	5.294272	21	6.217506	5.409203
2	5.308977	4.630416	12	6.104338	5.314411	22	6.224389	5.414839
3	5.513316	4.807185	13	6.124539	5.331500	23	6.230675	5.419961
4	5.662697	4.936097	14	6.141911	5.346158	24	6.236437	5.424631
5	5.774111	5.032020	15	6.156999	5.358852	25	6.241738	5.428903
6	5.858865	5.104829	16	6.170218	5.369940	26	6.246632	5.432823
7	5.924592	5.161173	17	6.181893	5.379699	27	6.251164	5.436430
8	5.976512	5.205587	18	6.192276	5.388348	28	6.255372	5.439756
9	6.018242	5.241212	19	6.201569	5.396060	29	6.259290	5.442832
10	6.052330	5.270250	20	6.209935	5.402974	30	6.262947	5.445681

Figura 4: Strutture per scadenza dei tassi di interesse lordi e netti (tassazione tcf posticipata con $\tau = 1$ mese) al 18/5/2000

rimane la stessa anche se si considera la struttura dei tassi netti di tipo tcf prodotta dal caso limite $\tau \to 0$.

3 Un'analisi dinamica

I risultati della sezione precedente mostrano come le varie forme di tassazione applicabili ai titoli del mercato obbligazionario in Italia, pur producendo diverse strutture di rendimenti netti, non producono distorsioni sostanziali nei segmenti significativi della curva dei tassi. Inoltre, a livello di tasso locale, le varie forme di tassazione sul mercato primario danno luogo alla stessa formula di *netting* e questo è vero anche se si considerano le regole di tassazione del mercato secondario dei titoli a cedola nulla, a patto che non sia passato troppo tempo dall'emissione e che le condizioni di mercato non siano mutate di troppo. Questo fatto suggerisce come procedere nel caso dinamico, quando si assume un modello evolutivo della struttura per scadenza dei tassi di interesse di tipo univariato e diffusivo, con variabile di stato il tasso locale. Se infatti si pone

$$\mathrm{d}r(t) = \mu\big(t, r(t)\big)\ \mathrm{d}t + \sigma\big(t, r(t)\big)\ \mathrm{d}W(t)\ , \tag{23a}$$

$$r(0) = r_0\ , \tag{23b}$$

dove μ e σ sono funzioni deterministiche (sufficientemente regolari sì da garantire l'eistenza e l'unicità della soluzione dell'equaione differenziale stocastica (23)) e W è un moto Browniano standard, per quanto visto in precedenza si può porre

$$r_\mathrm{n}(t) = (1-a)r(t)$$

ed ottenere quindi la dinamica del tasso locale netto nella forma

$$\mathrm{d}r_\mathrm{n}(t) = (1-a)\mu\big(t, r(t)\big)\ \mathrm{d}t + (1-a)\sigma\big(t, r(t)\big)\ \mathrm{d}W(t)\ , \tag{24a}$$

$$r_\mathrm{n}(0) = (1-a)r_0\ . \tag{24b}$$

Questo risultato è valido sia nel caso di probabilità naturali che nel caso di probabilità neutrali al rischio.

In particolare, nel caso del modello di Cox, Ingersoll e Ross univariato, si ha che

$$\mathrm{d}r(t) = \alpha\big(\gamma - r(t)\big)\ \mathrm{d}t + \rho\sqrt{r(t)}\ \mathrm{d}W(t)\ , \tag{25a}$$

$$r(0) = r_0\ , \tag{25b}$$

dove $\alpha, \gamma, \rho > 0$ e $2\alpha\gamma > \rho^2$, e che il prezzo di mercato del rischio è posto nella forma

$$q\big(t, r(t)\big) = \pi\frac{\sqrt{r(t)}}{\rho} \tag{26}$$

con π costante reale. La dinamica neutrale al rischio risulta pertanto

$$\mathrm{d}r(t) = \alpha^*\big(\gamma^* - r(t)\big)\ \mathrm{d}t + \rho\sqrt{r(t)}\ \mathrm{d}W^*(t)\ , \tag{27a}$$

$$r(0) = r_0\ , \tag{27b}$$

dove W^* è un (altro) opportuno moto Browniano standard e dove

$$\alpha^* = \alpha - \pi\ , \qquad \text{e} \qquad \gamma^* = \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \pi}\ .$$

La dinamica neutrale al rischio del tasso locale netto è quindi

$$\mathrm{d}r_{\mathrm{n}}(t) = \alpha_{\mathrm{n}}^{*}\big(\gamma_{\mathrm{n}}^{*} - r_{\mathrm{n}}(t)\big)\ \mathrm{d}t + \rho_{\mathrm{n}}\sqrt{r_{\mathrm{n}}(t)}\ \mathrm{d}W^{*}(t)\ \ , \tag{28a}$$

$$r_{\mathrm{n}}(0) = (1-a)r_0\ \ , \tag{28b}$$

dove

$$\alpha_{\mathrm{n}}^{*} = \alpha^{*}\ \ , \qquad \gamma_{\mathrm{n}}^{*} = (1-a)\gamma^{*}\ \ , \qquad \rho_{\mathrm{n}} = \sqrt{1-a}\,\rho\ \ . \tag{29}$$

Ipotizzando inoltre che anche il prezzo di mercato del rischio percepito dai nettisti sia nella forma (26), ovvero che sia

$$q_{\mathrm{n}}\big(t, r_{\mathrm{n}}(t)\big) = \pi_{\mathrm{n}}\frac{\sqrt{r_{\mathrm{n}}(t)}}{\rho_{\mathrm{n}}}\ \ , \tag{30}$$

si può estendere il risultato anche alla versione completa del modello. Infatti, ripetendo il ragionamento, si avrà che la dinamica naturale del tasso locale deve essere

$$\mathrm{d}r_{\mathrm{n}}(t) = \alpha_{\mathrm{n}}\big(\gamma_{\mathrm{n}} - r_{\mathrm{n}}(t)\big)\ \mathrm{d}t + \rho_{\mathrm{n}}\sqrt{r_{\mathrm{n}}(t)}\ \mathrm{d}W(t)\ \ , \tag{31a}$$

$$r_{\mathrm{n}}(0) = (1-a)r_0\ \ , \tag{31b}$$

dove

$$\alpha_{\mathrm{n}} = \alpha\ \ , \qquad \gamma_{\mathrm{n}} = (1-a)\gamma\ \ , \qquad \rho_{\mathrm{n}} = \sqrt{1-a}\,\rho\ \ . \tag{32}$$

Di conseguenza, dovendo essere

$$\alpha_{\mathrm{n}} - \pi_{\mathrm{n}} = \alpha_{\mathrm{n}}^{*} = \alpha^{*} = \alpha - \pi\ \ ,$$

risulta necessariamente che

$$\pi_{\mathrm{n}} = \pi \tag{33}$$

e pertanto che

$$q_{\mathrm{n}}\big(t, r_{\mathrm{n}}(t)\big) = \pi_{\mathrm{n}}\frac{\sqrt{r_{\mathrm{n}}(t)}}{\rho_{\mathrm{n}}} = \pi\frac{\sqrt{(1-a)r(t)}}{\sqrt{1-a}\,\rho} = q\big(t, r(t)\big)\ \ .$$

Questo risultato non deve sorprendere. Il prezzo di mercato del rischio rappresenta infatti l'extra-rendimento (rispetto al tasso locale) per unità di rischio che l'investitore (nettista o lordista che sia) pretende per impegnarsi in un contratto obbligazionario con scadenza finita. L'effetto della tassazione si ha sul diverso tasso locale (netto o lordo) di partenza, e non sull'extra-rendimento, che entrambe le tipologie di investitori valutano allo stesso modo.

Le relazioni (29) e le (32) e (33) rappresentano le formule di *netting* dei parametri del modello e, una volta stimata la versione lorda del modello sui dati di mercato, ne producono la versione netta.

È interessante estendere il meccanismo di *netting* anche al caso della riparametrizzazione alla Brown-Dybvig [1] del modello neutrale al rischio, secondo la quale si ha che

$$d = \sqrt{\alpha^* + 2\rho^2} \ , \qquad \varphi = \frac{\alpha^* + d}{2} \ , \qquad \nu = 2\frac{\alpha^*\gamma^*}{\rho^2} \ .$$

Con semplici passaggi si trovano le seguenti formule di trasformazione:

$$d_\mathrm{n} = \sqrt{\alpha_\mathrm{n}^{*2} + 2\rho_\mathrm{n}^2} = \sqrt{d^2 - 2a\rho^2} \qquad = \sqrt{d^2 - 4a\varphi(d-\varphi)} \ , \tag{34a}$$

$$\varphi_\mathrm{n} = \frac{\alpha_\mathrm{n}^* + d_\mathrm{n}}{2} \qquad = \frac{\alpha^* + \sqrt{d^2 - 2a\rho^2}}{2} = \frac{2\varphi - d + \sqrt{d^2 - 4a\varphi(d-\varphi)}}{2} \ , \tag{34b}$$

$$\nu_\mathrm{n} = \nu \ . \tag{34c}$$

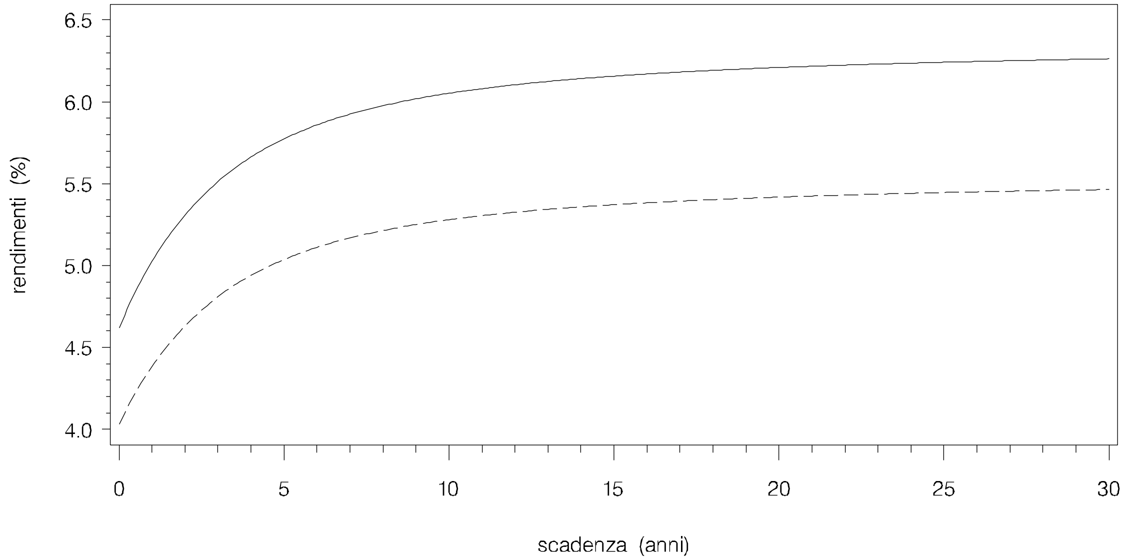
Nella figura 5 a pagina 15 sono riportate la struttura per scadenza dei tassi lordi (linea continua) in vigore sul mercato alla data del 18/5/2000 e quella dei tassi netti (linea tratteggiata) ottenuta dalla versione netta del modello di CIR, considerando un'aliquota fiscale $a = 12.5\%$. I parametri del modello, nella sua versione neutrale al rischio, sono stati stimati sulla cross-section dei tassi i.r. swap di quel giorno (media denaro-lettera delle quotazioni di fine giornata). Il risultato della procedura di stima è stato:

$$\begin{aligned} r(0) &= \ 0.0451439378 \ , & & \\ d &= \ 0.5504098137 \ , & \alpha^* &= 0.5412494532 \ , \\ \varphi &= \ 0.5458296334 \ , & \gamma^* &= 0.0622670174 \ , \\ \nu &= 13.4808057880 \ , & \rho &= 0.0707106515 \ . \end{aligned}$$

Le trasformazioni (29) e (34) di questa pagina hanno prodotto i parametri:

$$\begin{aligned} r_\mathrm{n}(0) &= \ 0.0395009456 \ , & & \\ d_\mathrm{n} &= \ 0.5492731233 \ , & \alpha_\mathrm{n}^* &= 0.5412494532 \ , \\ \varphi_\mathrm{n} &= \ 0.5452612882 \ , & \gamma_\mathrm{n}^* &= 0.0544836402 \ , \\ \nu_\mathrm{n} &= 13.4808057880 \ , & \rho_\mathrm{n} &= 0.0661437579 \ . \end{aligned}$$

Un confronto fra la figura 5 e le corrispondenti figure delle sezioni precedenti mostra come la struttura per scadenza dei tassi netti prodotta della versione netta del modello sia in linea con le strutture nette prodotte dal meccanismo di tassazione tcf.



$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$	$s-t$	$i(t,s)$	$i_{\mathrm{n}}(t,s)$
1	5.023812	4.382592	11	6.080590	5.304954	21	6.217506	5.424683
2	5.308977	4.631140	12	6.104338	5.325720	22	6.224389	5.430702
3	5.513316	4.809390	13	6.124539	5.343385	23	6.230675	5.436198
4	5.662697	4.939785	14	6.141911	5.358577	24	6.236437	5.441237
5	5.774111	5.037085	15	6.156999	5.371771	25	6.241738	5.445873
6	5.858865	5.111133	16	6.170218	5.383331	26	6.246632	5.450152
7	5.924592	5.168573	17	6.181893	5.393540	27	6.251164	5.454115
8	5.976512	5.213956	18	6.192276	5.402620	28	6.255372	5.457795
9	6.018242	5.250439	19	6.201569	5.410747	29	6.259290	5.461221
10	6.052330	5.280243	20	6.209935	5.418062	30	6.262947	5.464419

Figura 5: Strutture per scadenza dei tassi di interesse lordi e netti (tassazione continua) al 18/5/2000 (modello CIR)

Riferimenti bibliografici

[1] Brown S.J., Dybvig P.H., *The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Finance **41**(3), 1986.

[2] Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Mottura C., *Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse*, società editrice il Mulino, Bologna 1993.

[3] Cox J.C., Ingersoll J.E. jr., Ross S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica **53**(1985), 385–407.

[4] De Felice M., Moriconi F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, società editrice il Mulino, Bologna 1991.

[5] Mari C., Pacati C., *Due metodologie alternative per la stima della struttura per scadenza dei tassi di interesse: un confronto empirico sui dati italiani*, Atti del XVIII Convegno A.M.A.S.E.S. (Modena 1994).

[6] Pacati C., *Approssimazione polinomiale della struttura dei prezzi di titoli obbligazionari*, Atti del XIX Convegno A.M.A.S.E.S. (Pugnochiuso di Vieste 1995).

[7] Pacati C., *Estimating the Euro Term Structure of Interest Rates*, relazione presentata alla riunione scientifica del gruppo di ricerca MURST "Modelli per la finanza matematica" (Roma 1999), preprint 1999.